

Zbiór problemów i pytań bez odpowiedzi

SPIS TREŚCI

1. Informację wstępne	2
2. Problemy na rozruch	2
3. Modelowanie sygnałów ciągłych	3
4. Parametry sygnałów	5
5. Kwantyzacja	5
6. Próbkowanie	6
7. Obliczanie dyskretnej transformacji Fouriera	6
8. Analiza częstotliwościowa sygnałów dyskretnych	8
9. Systemy dyskretne	11
10. Projektowanie filtrów nierekursywnych	13
11. Dodatki	15
11.A Transformaty Z wybranych sekwencji	15

1. INFORMACJĘ WSTĘPNE

Niekoniecznie jestem autorem wszystkich problemów z tego zbioru. Problemy nie są z założenia ustawione w kolejności w jakiej powinny być rozwiązywane. Niektóre problemy mogą wymagać wiedzy naprzód, więc można je po prostu rozwiązać w późniejszym terminie. Niektóre sekcje tematyczne będą miały mniej problemów, a niektóre więcej.

Problemy mają dodatkowo następujące etykiety:

- P - rozwiązanie poprzez obliczenia numeryczne implementowane w postaci programu komputerowego,
- p - napisanie programu komputerowego może być pomocne przy rozwiązywaniu tego problemu,
- T - rozwiązanie poprzez obliczenia symboliczne/numeryczne na tablicy/kartce,
- t - rozpisanie problemu na tablicy/kartce będzie pomocne, a możliwe, że jest nawet wskazane,
- M - problem należy do modułu CPS. jł.

2. PROBLEMY NA ROZRUCH

Problem 2.1^P : Zaimplementuj funkcję $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$, która zwróci wartość funkcji silnia $n! \in \mathbb{N}^+$ dla liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$. Obliczenia zaimplementuj rekurencyjnie.

Problem 2.2^P : Zaimplementuj funkcję $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$, która zwróci wartość funkcji silnia $n! \in \mathbb{N}^+$ dla liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$. Obliczenia zaimplementuj iteracyjnie.

Problem 2.3^P : Zaimplementuj funkcję $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, która zwróci logiczną wartość prawda, jeżeli liczba $N \in \mathbb{N}$ jest parzysta. Dla liczb nieparzystych funkcja powinna zwracać wartość fałsz.

Problem 2.4^P : Zaimplementuj funkcję $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, która zwróci logiczną wartość prawda, jeżeli $N \in \mathbb{N}$ jest liczbą pierwszą. Dla liczb, które nie są pierwsze, funkcja powinna zwracać wartość fałsz.

Problem 2.5^P : Zaimplementuj funkcję $S \rightarrow S$, która zwróci wejściowy ciąg znakowy $s \in S$ w odwrotnej kolejności. Symbol S oznacza zbiór wszystkich ciągów znakowych.

Problem 2.6^P : Zaimplementuj funkcję $S \rightarrow \{0, 1\}$, która zwróci logiczną wartość prawda jeżeli ciąg znaków $a \in S$ jest palindromem. Symbol S oznacza zbiór wszystkich ciągów znakowych.

Problem 2.7^{Pt} : Zaimplementuj funkcję $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, która zwróci pole powierzchni trójkąta Sierpińskiego rzędu $N \in \mathbb{N}$. Załóż że pole powierzchni trójkąta Sierpińskiego rzędu 0 wynosi 1.0 i maleje wraz ze zwiększającym się rzędem.



Rysunek 1: Trójkąty Sierpińskiego następujących rzędów (od lewej): 0, 1, 2, 3, 4.

Problem 2.8^{Pt} : Zaimplementuj funkcję $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, która obliczy $\sqrt{a}$ dla $a \geq 0$ z wykorzystaniem metody Newtona.

Problem 2.9^P : Dany jest rekurencyjny ciąg $z_{n+1} = z_n^2 + p$, gdzie $z_n, p \in \mathbb{C}$ oraz $z_0 = 0$. Zbadaj i określ maksymalną K-zbieżność ciągu z_n dla punktów p takich że,

$$-1 < \Re(p) < 2,$$

$$-1 < \Im(p) < 1.$$

Zbiór K-zbieżnych punktów p ciągu z_n zdefiniowany jest jako:

$$M_K = \{p \in \mathbb{C} : \forall_{n < K} |z_n| < 2\}.$$

Wyrysuj płaszczyznę zespoloną, gdzie dla każdego zbadanego punktu p , przypisz maksymalne K , dla którego ciąg jest K-zbieżny.

Problem 2.10^P : Co zaskakujące, istnieją tylko trzy liczby, które można zapisać jako sumę czwartych potęg ich cyfr:

$$1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$$

$$8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$$

$$9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$$

Ponieważ $1 = 1^4$ nie jest sumą, nie została ona uwzględniona. Suma tych liczb wynosi $1634 + 8208 + 9474 = 19316$. Znajdź sumę wszystkich liczb, które można zapisać jako sumę piątych potęg ich cyfr.

Problem 2.11^P : Liczbę pierwszą nazwiemy cykliczną, jeżeli wszystkie cykliczne przesunięcia tej liczby są też liczbą pierwszą. Cykliczne przesunięcia liczby pierwszej 197 to 971 i 719. Istnieje trzynaście cyklicznych liczb pierwszych poniżej stu: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97. Ile takich liczb jest poniżej miliona?

3. MODELOWANIE SYGNAŁÓW CIĄGŁYCH

Problem 3.1^P : Oblicz wektor $x \in \mathbb{R}^{256}$, zawierający kolejne próbki pobrane z szybkością 1000 próbek na sekundę ciągłego rzeczywistego sygnału harmonicznego o amplitudzie 2, częstotliwości oscylacji 25 Hz, oraz przesunięciu fazowym $\frac{\pi}{4}$. Pierwsza próbka x_1 powinna być pobrana w momencie 0.25 s.

Problem 3.2^P : Oblicz wektor $x \in \mathbb{C}^N$, zawierający kolejne próbki, pobrane z szybkością 2048 próbek na sekundę, ciągłego zespolonego sygnału harmonicznego o amplitudzie 0.25, częstotliwości oscylacji $\frac{\pi}{2}$ Hz, oraz przesunięciu fazowym π . Pierwsza próbka x_1 powinna być pobrana w momencie 5.0 s, natomiast ostatnia próbka x_N powinna zostać pobrana w momencie 10.0 s.

Problem 3.3^P : Wygeneruj wektor $x \in \mathbb{R}^{1000}$, zawierający próbki szumu białego o mocy 0.25.

Problem 3.4^P : Wygeneruj wektor $x \in \mathbb{C}^{1000}$, zawierający próbki zespolonego szumu białego o mocy 2.

Problem 3.5^{PM} : Zaimplementuj funkcję `ci_rectangular`: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, zwracającą wartości impulsu prostokątnego o szerokości $T \in \mathbb{R}^+$ w chwili $t \in \mathbb{R}$.

Problem 3.6^{PM} : Zaimplementuj funkcję `ci_triangle`: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, zwracającą wartości impulsu trójkątnego o szerokości $T \in \mathbb{R}^+$ w chwili $t \in \mathbb{R}$.

Problem 3.7^{PM} : Zaimplementuj funkcję `ci_literka_M`: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, zwracającą impuls przypominający literę M o szerokości $T \in \mathbb{R}^+$ w chwili $t \in \mathbb{R}$.

Problem 3.8^{PM} : Zaimplementuj funkcję `ci_literka_U`: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, zwracającą impuls przypominający literę U o szerokości $T \in \mathbb{R}^+$ w chwili $t \in \mathbb{R}$.

Problem 3.9^{PM} : Zaimplementuj funkcję `ramp_wave`: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zwracającą wartości okresowego sygnału fali piłokształtnej z narastającym zboczem w chwili $t \in \mathbb{R}$. Sygnał powinien posiadać następujące parametry: amplituda 1, okres 1 sekunda, składowa stała 0, $\text{ramp_wave}(0) = 0$, oraz $\frac{\partial \text{ramp_wave}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 2$.

Problem 3.10^{PM} : Zaimplementuj funkcję `sawtooth_wave`: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zwracającą wartości okresowego sygnału fali piłokształtnej z opadającym zboczem w chwili $t \in \mathbb{R}$. Sygnał powinien posiadać następujące parametry: amplituda 1, okres 1 sekunda, składowa stała 0, $\text{sawtooth_wave}(0) = 0$, oraz $\frac{\partial \text{sawtooth_wave}}{\partial t} \Big|_{t=0} = -2$.

Problem 3.11^{PM} : Zaimplementuj funkcję `triangular_wave`: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zwracającą wartości okresowego sygnału fali trójkątnej w chwili $t \in \mathbb{R}$. Sygnał powinien posiadać następujące parametry: amplituda 1, okres 1 sekunda, składowa stała 0, $\text{triangular_wave}(0) = 0$, oraz $\frac{\partial \text{triangular_wave}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 4$.

Problem 3.12^{PM} : Zaimplementuj funkcję `square_wave`: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zwracającą wartości okresowego sygnału bipolarnej fali prostokątnej w chwili $t \in \mathbb{R}$. Sygnał powinien posiadać następujące parametry: amplituda 1, okres 1 sekunda, składowa stała 0, oraz $\text{square_wave}(t) = 1$ dla $t \in (0, \frac{1}{2})$.

Problem 3.13^{PM} : Zaimplementuj funkcję `pulse_wave`: $\mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zwracającą wartości okresowego sygnału (unipolarnego) impulsu prostokątnego w chwili $t \in \mathbb{R}$ o współczynniku wypełnienia $\rho \in [0, 1]$. Sygnał powinien posiadać następujące parametry: okres 1 s, składowa stała ρ , oraz $\text{pulse_wave}(t) = 1$ dla $t \in (0, \rho)$.

Problem 3.14^{PM} : Zaimplementuj funkcję `impulse_repeater`: $F \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow F$, która zwróci funkcję $f \in F$, gdzie F oznacza zbiór funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja f powinna zwracać wartość sygnału $f(t) \in \mathbb{R}$ w momencie $t \in \mathbb{R}$. Sygnał $f(t)$ jest sygnałem okresowym o okresie $T = t_2 - t_1$, gdzie $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ oraz $t_1 < t_2$. Funkcja f jest związany z funkcją wymuszającą $g \in F$ poprzez warunek

$$\int_{t_1}^{t_2} (f(t) - g(t))^2 dt = 0.$$

Problem 3.15^{PTM} : Zaimplementuj funkcję `ramp_wave_bl`: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja powinna zwracać wartość sygnału fali piłokształtnej z narastającym zboczem w chwili $t \in \mathbb{R}$. Dodatkowo zwracany sygnał powinien mieć amplitudę $A \in \mathbb{R}^+$, okres trwający $T \in \mathbb{R}^+$ sekund oraz pasmo tego sygnału powinno być ograniczone od dołu i góry przez częstotliwości $|B| \in \mathbb{R}^+$.

Problem 3.16^{PTM} : Zaimplementuj funkcję `sawtooth_wave_bl`: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja powinna zwracać wartość sygnału fali piłokształtnej z opadającym zboczem w chwili $t \in \mathbb{R}$. Dodatkowo zwracany sygnał powinien mieć amplitudę $A \in \mathbb{R}^+$, okres trwający $T \in \mathbb{R}^+$ sekund oraz pasmo tego sygnału powinno być ograniczone od dołu i góry przez częstotliwości $|B| \in \mathbb{R}^+$.

Problem 3.17^{PTM} : Zaimplementuj funkcję `triangular_wave_bl`: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja powinna zwracać wartość sygnału fali trójkątnej w chwili $t \in \mathbb{R}$. Dodatkowo zwracany sygnał powinien mieć amplitudę $A \in \mathbb{R}^+$, okres trwający $T \in \mathbb{R}^+$ sekund oraz pasmo tego sygnału powinno być ograniczone od dołu i góry przez częstotliwości $|B| \in \mathbb{R}^+$.

Problem 3.18^{PTM} : Zaimplementuj funkcję `square_wave_bl`: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja powinna zwracać wartość sygnału bipolarnej fali prostokątnej w chwili $t \in \mathbb{R}$. Dodatkowo zwracany sygnał powinien mieć amplitudę $A \in \mathbb{R}^+$, okres trwający $T \in \mathbb{R}^+$ sekund oraz pasmo tego sygnału powinno być ograniczone od dołu i góry przez częstotliwości $|B| \in \mathbb{R}^+$.

Problem 3.19^{PTM} : Zaimplementuj funkcję `pulse_wave_bl`: $\mathbb{R} \times [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja powinna zwracać wartość sygnału impulsu prostokątnego w chwili $t \in \mathbb{R}$ o współczynniku wypełnienia $\rho \in [0, 1]$. Dodatkowo zwracany sygnał powinien mieć amplitudę $A \in \mathbb{R}^+$, okres trwający $T \in \mathbb{R}^+$ sekund oraz pasmo tego sygnału powinno być ograniczone od dołu i góry przez częstotliwości $|B| \in \mathbb{R}^+$.

Problem 3.20^{PM} : Zaimplementuj funkcję `impulse_reaper_bl`: $F \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow F$, która zwróci funkcję $f_B \in F$, gdzie F oznacza zbiór funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja f_B powinna zwracać wartość sygnału $x(t) \in \mathbb{R}$ w momencie $t \in \mathbb{R}$. Sygnał x jest sygnałem okresowym o okresie $T = t_2 - t_1$, gdzie $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ oraz $t_1 < t_2$. Pasma sygnału x powinno być ograniczone od dołu i góry przez częstotliwość $|B| \in \mathbb{R}^+$. Funkcja f_B jest związany z funkcją wymuszającą $g \in F$ poprzez warunek

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} (f_B(t) - g(t))^2 dt = 0.$$

Problem 3.21^{PM} : Zaimplementuj funkcję `rand_signal_bl`: $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow F$, która zwróci funkcję $f \in F$, gdzie F oznacza zbiór funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja f powinna zwracać wartość sygnału $x(t) \in \mathbb{R}$ w momencie $t \in \mathbb{R}$. Sygnał x jest pseudolosowym sygnałem którego pasmo jest ograniczone przez częstotliwości $f_1, f_2 \in \mathbb{R}$, gdzie $f_1 < f_2$. Widmo tego sygnału w paśmie $f \in (f_1, f_2)$ powinno przypominać widmo szumu białego. Moc sygnału $x(t)$ powinna wynosić w przybliżeniu 1.0. Przeanalizuj kiedy zastosowany model matematyczny będzie dobrze odwzorowywał modelowany sygnał.

Problem 3.22^{PM} : Zaimplementuj funkcję `kronecker`: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, zwracającą wartość dyskretnego impulsu jednostkowego (delta Kroneckera) dla $n \in \mathbb{Z}$.

Problem 3.23^{PM} : Zaimplementuj funkcję `heaviside`: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, zwracającą wartość dyskretnego skoku jednostkowego (funkcja skokowa Heaviside'a) dla $n \in \mathbb{Z}$.

Problem 3.24^{PM} : Zaimplementuj funkcję `rect`: $\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$, zwracającą wektor $x \in \mathbb{R}^N$ z próbkami dyskretnego okna prostokątnego o długości $N > 0$.

Problem 3.25^{PM} : Zaimplementuj funkcję `triang`: $\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$, zwracającą wektor $x \in \mathbb{R}^N$ z próbkami dyskretnego okna trójkątnego (Barletta) o długości $N > 0$.

Problem 3.26^{PM} : Zaimplementuj funkcję `hanning`: $\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$, zwracającą wektor $x \in \mathbb{R}^N$ z próbkami dyskretnego okna Hanninga o długości $N > 0$.

Problem 3.27^{PM} : Zaimplementuj funkcję `hamming`: $\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$, zwracającą wektor $x \in \mathbb{R}^N$ z próbkami dyskretnego okna Hamminga o długości $N > 0$.

Problem 3.28^{PM} : Zaimplementuj funkcję `blackman`: $\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$, zwracającą wektor $x \in \mathbb{R}^N$ z próbkami dyskretnego okna Blackmana o długości $N > 0$.

Problem 3.29^{PM} : Zaimplementuj funkcję `chebwin`: $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$, zwracającą wektor $x \in \mathbb{R}^N$ z próbkami dyskretnego okna parametrycznego Dolph–Chebyshev o długości $N > 0$, oraz względem tłumieniem listków bocznych $\alpha \in \mathbb{R}^+$ wyrażonym w dB.

Problem 3.30^{PM} : Zaimplementuj funkcję `kaiser`: $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$, zwracającą wektor $x \in \mathbb{R}^N$ z wartościami próbki dyskretnego okna Kaisera o długości $N > 0$ dla parametru $\beta \in \mathbb{R}^+$.

4. PARAMETRY SYGNAŁÓW

Problem 4.1^{PM} : Zaimplementuj funkcję `mean`: $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ zwracającą wartość średnią dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^N$.

Problem 4.2^{PM} : Zaimplementuj funkcję `peak2peak`: $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ zwracającą wartość międzyszczytową dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{R}^N$.

Problem 4.3^{PM} : Zaimplementuj funkcję `energy`: $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$ zwracającą energię dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^N$.

Problem 4.4^{PM} : Zaimplementuj funkcję `power`: $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$ zwracającą moc dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^N$.

Problem 4.5^{PM} : Zaimplementuj funkcję `rms`: $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$ zwracającą wartość skuteczną dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^N$.

Problem 4.6^{PM} : Zaimplementuj funkcję `running_mean`: $\mathbb{C}^N \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}^N$ zwracającą dyskretny sygnał średniej bieżącej dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^N$ z wycinków sygnału o szerokości $2M + 1$ próbek.

Problem 4.7^{PM} : Zaimplementuj funkcję `running_energy`: $\mathbb{C}^N \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ zwracającą dyskretny sygnał energii bieżącej dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^N$ z wycinków sygnału o szerokości $2M + 1$ próbek.

Problem 4.8^{PM} : Zaimplementuj funkcję `running_power`: $\mathbb{C}^N \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ zwracającą dyskretny sygnał mocy bieżącej dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^N$ z wycinków sygnału o szerokości $2M + 1$ próbek.

5. KWANTYZACJA

Problem 5.1^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{quantize}: \mathbb{R}^N \rightarrow F$, która zwróci funkcję $f_L \in F$, gdzie F to zbiór funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja $f_L(x)$ powinna zwracać dla wartości $x \in \mathbb{R}$ poziom kwantyzacji $l' \in L$ poprzez rozwiązanie problemu

$$l' = \arg \min_{l \in L} \|x - l\|_2,$$

gdzie $L = [l_1, l_2, \dots, l_N]^T \in \mathbb{R}^N$ zawiera poziomy kwantyzacji, które spełniają warunek $l_i \neq l_j$ dla $i \neq j$.

Problem 5.2^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{SQNR}: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, która obliczy teoretyczny stosunek mocy sygnału do mocy szumu kwantyzacji wyrażony w decybelach dla idealnego $N \in \mathbb{N}^+$ bitowego przetwornika analogowo cyfrowego.

Problem 5.3^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{SNR}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, która obliczy stosunek mocy sygnału do mocy szumu wyrażony w decybelach.

Problem 5.4^P : Zbadaj zależność między teoretycznymi i rzeczywistymi wartościami SQNR dla różnych sygnałów. Wykreśl charakterystyki w zależności od ilości bitów kwantyzatora oraz uzasadnij otrzymany rezultat w kontekście modelu matematycznego z którego otrzymano teoretyczną wartość SQNR. Czy teoria zgadza się z praktyką?

Problem 5.5^T : Dany jest kwantyzator, który ma 2^N poziomów kwantyzacji, gdzie $N \in \mathbb{N}$. Minimalny i maksymalny poziom kwantyzacji wynosi odpowiednio $L_{\min}, L_{\max} \in \mathbb{R}$, gdzie $L_{\min} < L_{\max}$. Dystans między dwoma kolejnymi poziomami kwantyzacji jest stały. Znajdź wyrażenie na wartość maksymalnego błędu kwantyzacji $Q \in \mathbb{R}$, generowany przez ten system. Przyjmij, że wartość sygnału wejściowego $x(t)$ spełnia zawsze warunek $L_{\min} \leq x(t) \leq L_{\max}$.

Problem 5.6^{PT} : Wyprowadź wzór na teoretyczną wartość SQNR przy założeniu, że sygnał wejściowy kwantyzatora jest modelowany poprzez sygnał piłokształtny. Załóż również, że sygnał błędu kwantyzacji jest również modelowany poprzez sygnał piłokształtny. Sprawdź czy wartość teoretycznego SQNR będzie zgadzał się z wartością obliczoną numerycznie dla wejściowego sygnału piłokształtnego. Jeżeli wartości się różnią, to uzasadnij skąd wynikają te różnice.

6. PRÓBKOWANIE

Problem 6.1^T : Dany jest sygnał $x(t) = \sin(200\pi t)$ z którego zostały pobrane próbki z częstotliwością $f_p = 250$ Hz. Znajdź wynikowy ciąg $x[n]$.

Problem 6.2^T : Dany jest sygnał $s(t) = \cos(\omega t), t \in \mathbb{R}$. W wyniku operacji próbkowania został otrzymany ciąg $s[n] = \cos(\gamma\pi n)$, gdzie $\gamma \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{Z}$. Znajdź ω przy założeniu, że częstotliwość próbkowania wynosi $f_p \in \mathbb{R}^+$.

Problem 6.3^T : Określ czy dane poniżej ciągi są okresowe. Jeżeli tak, wyznacz okres.

- $x[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8}\right)$
- $g[n] = \exp\left(j\left(\frac{n}{8} - \pi\right)\right)$

Problem 6.4^T : Dany jest ciągły sygnał $s(t) = g(t) \cos(1000\pi t)$ z którego zostały pobrane próbki $s[n] = s\left(\frac{n}{f_s}\right)$. Jeżeli $f_s > 1300$, to ciąg $s[n]$ jest jednoznaczny z ciągłym sygnałem $s(t)$, tzn. możliwa jest perfekcyjna rekonstrukcja sygnału ciągłego $s(t)$ na podstawie dyskretnych próbek $s[n]$. Jaki warunek należy postawić dla częstotliwości próbkowania f_g , aby ciąg $g[n] = g\left(\frac{n}{f_g}\right)$ był jednoznaczny z ciągłym sygnałem $g(t)$?

Problem 6.5^T : Znajdź widmo częstotliwościowe funkcji próbkującej¹ $\text{w}_T(t)$, gdzie $T > 0$ to okres, a następnie wyraż widmo przy pomocy funkcji próbkującej.

Problem 6.6^T : Znajdź widmo częstotliwościowe sygnału $g(t) = x(t)\text{w}_T(t)$, gdzie $x(t)$ to ciągły sygnał, a $\text{w}_T(t)$ funkcja próbkująca o okresie T .

Problem 6.7^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{interpolate}: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times F_s \rightarrow F$, która zwróci funkcję $f \in F$, gdzie F to zbiór funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zwracającą wartość $f(x) = \hat{x}(t)$, gdzie $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}$ to interpolacją ciągłego sygnału $x(t) \in \mathbb{R}$ w chwili $t \in \mathbb{R}$. Do interpolacji wykorzystaj metodę funkcji sklejnych z funkcją $k \in F_s$, gdzie F_s jest zbiorem wszystkich funkcji sklejnych $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Węzły interpolacyjne są dane przez dwa wektory $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^N$ i $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N$, gdzie $\mathbf{m} = [t_1, t_2, \dots, t_N]$, a $\mathbf{s} = [x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)]$. Dodatkowo załóż że $t_{n+1} - t_n = \Delta t$.

Problem 6.8^P : Zbadaj błąd rekonstrukcji sygnału $x(t) = \cos(\pi f_p t + \varphi)$ próbkowanego z tak zwaną krytyczną częstotliwością próbkowania $f_p \in \mathbb{R}$, w zależności od przesunięcia fazowego $\varphi \in [0, 2\pi]$. Do rekonstrukcji wykorzystaj metodę funkcji sklejnych oraz funkcję $\text{sinc}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako bazową funkcję sklejną. Wykreśl badaną charakterystykę oraz uzasadnij jej przebieg.

¹Jedną z alternatywnych nazw funkcji próbkującej jest funkcja grzebieńowa Diraca.

7. OBLICZANIE DYSKRETNEJ TRANSFORMACJI FOURIERA

Problem 7.1^T : Oblicz dwupunktową dyskretną transformację Fouriera (2-DFT) sygnału $x \in \mathbb{R}^2$.

$$x = (20, 5)$$

Problem 7.2^T : Oblicz czteropunktową dyskretną transformację Fouriera (4-DFT) sygnału $x \in \mathbb{R}^4$.

$$x = (3, 2, 5, 1)$$

Problem 7.3^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{dtft} : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, która obliczy wartość ciągłego widma częstotliwościowego dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^N$ dla częstotliwości $f \in \mathbb{R}$, przy założeniu że próbki sygnału były pobrane z częstotliwością $f_s \in \mathbb{R}^+$. Do obliczenia tego przekształcenia wykorzystaj dyskretną w czasie transformację Fouriera oraz algorytm naiwny (tzn. bezpośrednio ze wzoru).

Problem 7.4^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{dft} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ dla $N \in \mathbb{N}^+$, która przekształci dyskretny sygnał $x \in \mathbb{C}^N$ z domeny czasu do odpowiadającego mu dyskretnego sygnału $X \in \mathbb{C}^N$ w domenie częstotliwości (dwustronne dyskretne widmo częstotliwościowe). Do obliczenia tego przekształcenia wykorzystaj dyskretną transformację Fouriera oraz algorytm naiwny (tzn. bezpośrednio ze wzoru).

Problem 7.5^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{idft} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ dla $N \in \mathbb{N}^+$, która przekształci dyskretny sygnał $X \in \mathbb{C}^N$ z domeny częstotliwości (dwustronne dyskretne widmo częstotliwościowe) do odpowiadającego mu dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^N$ w domenie czasu. Do obliczenia tego przekształcenia wykorzystaj odwrotną dyskretną transformację Fouriera oraz algorytm naiwny (tzn. bezpośrednio ze wzoru).

Problem 7.6^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{goertzel} : \mathbb{C}^N \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ dla $N \in \mathbb{N}^+$, która przekształci dyskretny sygnał $x \in \mathbb{C}^N$ i obliczy wartości dyskretnej transformaty Fouriera $X[k] \in \mathbb{C}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Do obliczenia tego przekształcenia wykorzystaj algorytm Goertzela.

Problem 7.7^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{recursive_dft} : \mathbb{N} \rightarrow F$, gdzie $F = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^N\}$ oraz $N \in \mathbb{N}$. Generowana funkcja $f \in F$ (dokładnie) powinna obliczać rekursywnie N -punktową dyskretną transformację Fouriera $X_n \in \mathbb{C}^N$ z kolejnych wartości dyskretnego sygnału $x[n] \in \mathbb{C}$. Załóż, że początkowy wartość transformaty wynosi zero.

Przykład: Pierwsze wywołanie funkcji $f(x[0] \in \mathbb{C})$ powinna zwracać wartość N -punktowej dyskretnej transformacji Fouriera dla dyskretnego sygnału $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ x[0]) \in \mathbb{C}^N$. Kolejny wywołanie funkcji $f(x[1] \in \mathbb{C})$ powinna zwracać wartość N -punktowej dyskretnej transformacji Fouriera dla dyskretnego sygnału $(0 \ 0 \ \dots \ x[0] \ x[1]) \in \mathbb{C}^N$.

Problem 7.8^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{exp_recursive_dft} : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow F$, gdzie $F = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^N\}$ oraz $N \in \mathbb{N}$. Generowana funkcja $f \in F$ (dokładnie) powinna obliczać rekursywnie N -punktową dyskretną transformację Fouriera $X_n \in \mathbb{C}^N$ z kolejnych wartości dyskretnego sygnału $x[n] \in \mathbb{C}$ na który zostało nałożone okno eksponentacyjne $w[n] = e^{\alpha n}$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$. Załóż, że początkowy wartość transformaty wynosi zero. Zbadaj stabilność numeryczną algorytmu.

Przykład: Pierwsze wywołanie funkcji $f(x[0] \in \mathbb{C})$ powinna zwracać wartość N -punktowej dyskretnej transformacji Fouriera dla dyskretnego sygnału $(w[0] \cdot 0 \ w[1] \cdot 0 \ \dots \ w[N-2] \cdot 0 \ w[N-1] \cdot x[0]) \in \mathbb{C}^N$. Kolejny wywołanie funkcji $f(x[1] \in \mathbb{C})$ powinna zwracać wartość N -punktowej dyskretnej transformacji Fouriera dla dyskretnego sygnału $(w[0] \cdot 0 \ w[1] \cdot 0 \ \dots \ w[N-2] \cdot x[0] \ w[N-1] \cdot x[1]) \in \mathbb{C}^N$.

Problem 7.9^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{cos_recursive_dft} : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^M \rightarrow F$, gdzie $F = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^N\}$ oraz $N \in \mathbb{N}$. Generowana funkcja $f \in F$ (dokładnie) powinna obliczać rekursywnie N -punktową dyskretną transformację Fouriera $X_n \in \mathbb{C}^N$ z kolejnych wartości dyskretnego sygnału $x[n] \in \mathbb{C}$ na który zostało nałożone okno z rodziny $w[n] = \sum_{m=0}^{M-1} a_{m+1} \cos(\frac{2\pi m}{N-1}n)$ dla $a \in \mathbb{R}^M$. Załóż, że początkowy wartość transformaty wynosi zero.

Przykład: Pierwsze wywołanie funkcji $f(x[0] \in \mathbb{C})$ powinna zwracać wartość N -punktowej dyskretnej transformacji Fouriera dla dyskretnego sygnału $(w[0] \cdot 0 \ w[1] \cdot 0 \ \dots \ w[N-2] \cdot 0 \ w[N-1] \cdot x[0]) \in \mathbb{C}^N$. Kolejny wywołanie funkcji $f(x[1] \in \mathbb{C})$ powinna zwracać wartość N -punktowej dyskretnej transformacji Fouriera dla dyskretnego sygnału $(w[0] \cdot 0 \ w[1] \cdot 0 \ \dots \ w[N-2] \cdot x[0] \ w[N-1] \cdot x[1]) \in \mathbb{C}^N$.

Problem 7.10^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{rdft} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}$ dla $N \in \mathbb{N}^+$, która przekształci dyskretny sygnał $x \in \mathbb{R}^N$ z domeny czasu do odpowiadającego mu dyskretnego sygnału $X \in \mathbb{C}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}$ w domenie częstotliwości (jednostronne dyskretne widmo częstotliwościowe). Do obliczenia tego przekształcenia wykorzystaj dyskretną transformację Fouriera oraz algorytm naiwny (tzn. bezpośrednio ze wzoru).

Problem 7.11^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{irdft} : \mathbb{C}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ dla $N \in \mathbb{N}^+$, która przekształci dyskretny sygnał $X \in \mathbb{C}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}$ z domeny częstotliwości (jednostronne dyskretne widmo częstotliwościowe) do odpowiadającego mu dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{R}^N$ w domenie czasu. Do obliczenia tego przekształcenia wykorzystaj odwrotną dyskretną transformację Fouriera oraz naiwny algorytm (tzn. bezpośrednio ze wzoru).

Problem 7.12^T : Wyprowadź algorytm Cooley–Tukey w wersji radix-2 do obliczenia N -punktowej dyskretnej transformacji Fouriera $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$, gdzie $N = 2^K$ dla $K \in \mathbb{N}^+$. Wyprowadzenie zacznij od wzoru na dyskretną transformację Fouriera.

Problem 7.13^{PM} : Zaimplementuj funkcję fft_radix2_dit_r : $\mathbb{C}^{2^K} \rightarrow \mathbb{C}^{2^K}$ dla $K \in \mathbb{N}^+$, która przekształci dyskretny sygnał $x \in \mathbb{C}^{2^K}$ z domeny czasu do odpowiadającego mu dyskretnego sygnału $X \in \mathbb{C}^{2^K}$ w domenę częstotliwości (dwustronne dyskretno widmo częstotliwościowe). Do obliczenia tego przekształcenia wykorzystaj dyskretną transformację Fouriera oraz algorytm *Cooleya-Tukeya* w wersji radix-2 z decymacją w dziedzinie czasu. Obliczenia zaimplementuj z wykorzystaniem rekurencji.

Problem 7.14^{PM} : Zaimplementuj funkcję ifft_radix2_dif_r : $\mathbb{C}^{2^K} \rightarrow \mathbb{C}^{2^K}$ dla $K \in \mathbb{N}^+$, która przekształci dyskretny sygnał $X \in \mathbb{C}^{2^K}$ z domeny częstotliwości (dwustronne dyskretno widmo częstotliwościowe) do odpowiadającego mu dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^{2^K}$ w domenę czasu. Do obliczenia tego przekształcenia wykorzystaj odwrotną dyskretną transformację Fouriera oraz algorytm *Cooleya-Tukeya* w wersji radix-2 z decymacją w dziedzinie częstotliwości. Obliczenia zaimplementuj z wykorzystaniem rekurencji.

Problem 7.15^T : Wyprowadź algorytm Cooley–Tukey w wersji radix-3 do obliczenia N -punktowej dyskretno transformacji Fouriera $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$, gdzie $N = 3^K$ dla $K \in \mathbb{N}^+$. Wyprowadzenie zacznij od wzoru na dyskretną transformację Fouriera.

Problem 7.16^T : Wyprowadź algorytm Cooley–Tukey w wersji radix- M do obliczenia N -punktowej dyskretno transformacji Fouriera $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$, gdzie $N = M^K$ dla $K \in \mathbb{N}^+$. Wyprowadzenie zacznij od wzoru na dyskretną transformację Fouriera.

Problem 7.17^T : Dla jakiej liczby $N \in \mathbb{N}^+$ nie istnieje algorytm radix- N o mniejszej złożoności obliczeniowej niż algorytm bezpośredni?

Problem 7.18^{PM} : Zaimplementuj funkcję fft : $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ dla $N \in \mathbb{N}^+$, która przekształci dyskretny sygnał $x \in \mathbb{C}^N$ z domeny czasu do odpowiadającego mu dyskretnego sygnału $X \in \mathbb{C}^N$ w domenę częstotliwości (dwustronne dyskretno widmo częstotliwościowe). Do obliczenia tego przekształcenia wykorzystaj dyskretną transformację Fouriera oraz połącz znane Ci algorytmy tak aby zaimplementowana funkcja miała jak najmniejszą złożoność obliczeniową.

Problem 7.19^{PM} : Zaimplementuj funkcję ifft : $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ dla $N \in \mathbb{N}^+$, która przekształci dyskretny sygnał $X \in \mathbb{C}^N$ z domeny częstotliwości (dwustronne dyskretno widmo częstotliwościowe) do odpowiadającego mu dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^N$ w domenę czasu. Do obliczenia tego przekształcenia wykorzystaj odwrotną dyskretną transformację Fouriera oraz połącz znane Ci algorytmy tak aby zaimplementowana funkcja miała jak najmniejszą złożoność obliczeniową.

Problem 7.20^{PM} : Zaimplementuj funkcję rfft : $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}$ dla $N \in \mathbb{N}^+$, która przekształci dyskretny sygnał $x \in \mathbb{R}^N$ z domeny czasu do odpowiadającego mu dyskretnego sygnału $X \in \mathbb{C}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}$ w domenę częstotliwości (jednostronne dyskretno widmo częstotliwościowe). Do obliczenia tego przekształcenia wykorzystaj dyskretną transformację Fouriera oraz połącz znane Ci algorytmy tak aby zaimplementowana funkcja miała jak najmniejszą złożoność obliczeniową.

Problem 7.21^{PM} : Zaimplementuj funkcję irfft : $\mathbb{C}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ dla $N \in \mathbb{N}^+$, która przekształci dyskretny sygnał $X \in \mathbb{C}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}$ z domeny częstotliwości (jednostronne dyskretno widmo częstotliwościowe) do odpowiadającego mu dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{R}^N$ w domenę czasu. Do obliczenia tego przekształcenia wykorzystaj odwrotną dyskretną transformację Fouriera oraz połącz znane Ci algorytmy tak aby zaimplementowana funkcja miała jak najmniejszą złożoność obliczeniową.

8. ANALIZA CZĘSTOTLIWOŚCIOWA SYGNAŁÓW DYSKRETYCH

Problem 8.1^T : Niech wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{5000}$ zawiera w sobie 5000 próbek pobranych z ciągłego sygnału $x(t) \in \mathbb{R}$. Odstęp czasu między dwiema kolejnymi próbkami wynosi $\Delta t = 50 \cdot 10^{-6}$. Następnie, korzystając z wektora $\mathbf{x}$ zostało obliczone widmo częstotliwościowe z wykorzystaniem 8192-punktowej dyskretnej transformaty Fouriera. Jaki będzie odstęp częstotliwościowy Δf między dwoma sąsiadującymi próbkami w wynikowej transformacji?

Problem 8.2^T : Sygnał $x(t) \in \mathbb{C}$ ma ograniczone pasmo przez częstotliwość 500 Hz, tzn. $X(j\omega) = 0, \forall \omega : |\omega| \geq 1000\pi$. Następnie z sygnału $x(t)$ zostają pobrane próbki, które tworzą następującą ciąg $x[n] = x(\Delta t \cdot n), n \in \mathbb{Z}$, gdzie $\Delta t = 0.001$ sekundy. Niech ciąg $X[k] \in \mathbb{C}, k = 0, \dots, 1999$ będzie dyskretną transformatą Fouriera dowolnego zwartego podciągu $x[n]$ o długości 2000.

- Z jaką ciągłą częstotliwością widma $X(j\omega)$ będzie korespondował próbek $X[k]$ dla $k = 0$?
- Z jaką ciągłą częstotliwością widma $X(j\omega)$ będzie korespondował próbek $X[k]$ dla $k = 200$?
- Z jaką ciągłą częstotliwością widma $X(j\omega)$ będzie korespondował próbek $X[k]$ dla $k = 1000$?
- Z jaką ciągłą częstotliwością widma $X(j\omega)$ będzie korespondował próbek $X[k]$ dla $k = 1600$?

Problem 8.3^T : Ciągły sygnał $x(t) \in \mathbb{C}$ ma ograniczone pasmo od góry przez częstotliwość 5000, tzn. $X(j\omega) = 0, \forall \omega : |\omega| > 10000\pi$. Następnie z tego sygnału zostały pobrane próbki z okresem Δt , przez co powstał ciąg $x[n] = x(\Delta t \cdot n)$. W celu wykonania analizy częstotliwościowej tego sygnału obliczamy N -punktową dyskretną transformację Fouriera z N kolejnych wartości ciągu $x[n]$. Jako że potrzebujemy obliczyć w jak najkrótszym czasie wartości dyskretnej transformacji Fouriera, to wykorzystujemy do tego celu algorytm szybkiej transformacji Fouriera *radix-2*. Wyznacz minimalną wartość N oraz przedział do którego musi należeć częstotliwość próbkowania, tak aby nie wystąpił aliasing oraz odstęp częstotliwościowy między próbkami (Δf) dyskretnego widma częstotliwościowego był mniejszy niż 5.

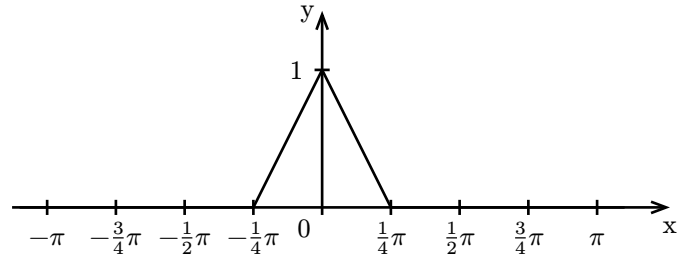
Problem 8.4^T : Dany jest dyskretny sygnał

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Przyjmij że częstotliwość próbkowania jest znormalizowana, to znaczy $f_p = 1$. Wykreśl widmo dyskretnej w czasie transformacji Fouriera $X(e^{j\Omega})$ w zakresie od $-\pi$ do π dla poniższych sygnałów. Przypisz wartości charakterystycznym punktom na wykresie.

- $y[n] = x[n] \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)$
- $y[n] = x[n] \exp\left(j\frac{\pi}{8}n\right)$
- $y[n] = x[n] \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$
- $y[n] = x[n] \exp\left(j\frac{\pi}{2}n\right)$
- $y[n] = x[n] \cos\left(\frac{7\pi}{8}n\right)$
- $y[n] = x[n] \exp\left(j\frac{7\pi}{8}n\right)$

Problem 8.5^T : Na poniższym wykresie dane jest widmo amplitudowe dyskretnej w czasie transformacji Fouriera $X(e^{j\Omega})$ pewnego sygnału $x[n]$.



Wykreśl widmo dyskretnej w czasie transformacji Fouriera w zakresie od $-\pi$ do π dla poniższych sygnałów. Przypisz wartości charakterystycznym punktom na wykresie.

- $y[n] = x[n] \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)$
- $y[n] = x[n] \exp\left(j\frac{\pi}{8}n\right)$
- $y[n] = x[n] \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$
- $y[n] = x[n] \exp\left(j\frac{\pi}{2}n\right)$
- $y[n] = x[n] \cos\left(\frac{7\pi}{8}n\right)$
- $y[n] = x[n] \exp\left(j\frac{7\pi}{8}n\right)$

Problem 8.6^T : Rozważ sytuację w której szacujemy widmo amplitudowe dyskretne w czasie sygnału $x[n]$ z wykorzystaniem dyskretnej transformacji Fouriera. Do analizy częstotliwościowej wykorzystane jest dyskretne okno Hamminga o długości $L = 2^k$, które jest nałożone na sygnał przed obliczeniem transformacji. Znajdź minimalną długość okna (tzn. k), aby możliwe było rozróżnienie w widmie amplitudowym dwóch sygnałów harmonicznych, których częstotliwość różnią się od siebie zaledwie o $\frac{\pi}{100}$ w Ω (znormalizowana częstość kołowa).

Problem 8.7^T : Poniżej dane są trzy różne sygnały $x_i[n]$, które charakteryzują się tym, że składają się sumy dwóch sygnałów harmonicznych.

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 1.000 \cos\left(\frac{17\pi}{64}n\right)$$

$$x_2[n] = \cos\left(\frac{33\pi}{64}n\right) + 1.200 \cos\left(\frac{21\pi}{64}n\right)$$

$$x_3[n] = \cos\left(\frac{33\pi}{64}n\right) + 0.800 \cos\left(\frac{28\pi}{64}n\right)$$

$$x_4[n] = \cos\left(\frac{19\pi}{64}n\right) + 0.001 \cos\left(\frac{24\pi}{64}n\right)$$

$$x_5[n] = \cos\left(\frac{18\pi}{64}n\right) + 0.001 \cos\left(\frac{23\pi}{64}n\right)$$

Na sygnały te zostaje nałożone okna prostokątne o długościu 64 próbek, a następnie zostaje oszacowane widmo częstotliwościowe z wykorzystaniem 64 punktowej dyskretnej transformacji Fouriera. W których widmach amplitudowych, będą widoczne dwie wartości szczytowe, korespondujące z sygnałami harmonicznymi? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Problem 8.8^{PM} : Zaimplementuj funkcję `fftfreq`: $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$, która obliczy wektor $f \in \mathbb{R}^N$ z kolejnymi dyskretnymi częstotliwościami występującymi w N -punktowej dyskretniej transformacji Fouriera (dwustronne dyskretnie widmo częstotliwościowe), gdzie $N \in \mathbb{N}^+$, przy założeniu, że częstotliwość próbkowania sygnału w domenie czasu wynosiła $f_p \in \mathbb{R}^+$. Wartość $(k+1)$ -tego elementu wektora f powinna określać z jaką ciągłą częstotliwością próbkowanego sygnału stowarzyszona jest wartość transformaty $X[k]$ dla $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Problem 8.9^{PM} : Zaimplementuj funkcję `rfftfreq`: $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}$, która obliczy wektor $f \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}$ z kolejnymi dyskretnymi częstotliwościami występującymi w N -punktowej dyskretniej transformacji Fouriera (jednostronne dyskretnie widmo częstotliwościowe), gdzie $N \in \mathbb{N}^+$, przy założeniu, że częstotliwość próbkowania sygnału w domenie czasu wynosiła $f_p \in \mathbb{R}^+$. Wartość $(k+1)$ -tego elementu wektora f powinna określać z jaką ciągłą częstotliwością próbkowanego sygnału stowarzyszona jest wartość transformaty $X[k]$ dla $k = 0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$.

Problem 8.10^{PM} : Zaimplementuj funkcję `amplitude_spectrum`: $\mathbb{C}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, która obliczy widmo amplitudowe $A \in \mathbb{R}^N$ dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^N$, gdzie $N \in \mathbb{N}$. Wektor x powstał poprzez nałożenie N -punktowego okna $w \in \mathbb{R}^N$ na ciągły wycinek ciągu $g[n] \in \mathbb{C}$ dla $n \in \mathbb{Z}$, tzn. $x_i = w_i \cdot g[i+k]$ dla $i = 1, \dots, N$ i $k \in \mathbb{Z}$.

Problem 8.11^{PM} : Zaimplementuj funkcję `power_spectrum`: $\mathbb{C}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, która obliczy widmo mocy $P \in \mathbb{R}^N$ dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^N$, gdzie $N \in \mathbb{N}$. Wektor x powstał poprzez nałożenie N -punktowego okna $w \in \mathbb{R}^N$ na ciągły wycinek ciągu $g[n] \in \mathbb{C}$ dla $n \in \mathbb{Z}$, tzn. $x_i = w_i \cdot g[i+k]$ dla $i = 1, \dots, N$ i $k \in \mathbb{Z}$.

Problem 8.12^{PM} : Zaimplementuj funkcję `psd`: $\mathbb{C}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$, która obliczy widmową gęstość mocy $G \in \mathbb{R}^N$ dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^N$, gdzie $N \in \mathbb{N}$. Wektor x powstał poprzez nałożenie N -punktowego okna $w \in \mathbb{R}^N$ na ciągły wycinek ciągu $g[n] \in \mathbb{C}$ dla $n \in \mathbb{Z}$, tzn. $x_i = w_i \cdot g[i+k]$ dla $i = 1, \dots, N$ i $k \in \mathbb{Z}$, natomiast ciąg $g[n]$ powstał poprzez próbkowanie ciągłego sygnału $x(t)$ z szybkością $f_p \in \mathbb{R}^+$ próbek na sekundę.

Problem 8.13^{PM} : Zaimplementuj funkcję `welch`: $\mathbb{C}^N \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^K$, która oszacuje widmową gęstość mocy dyskretnego sygnału $x \in \mathbb{C}^N$, próbkowanego z szybkością $f_p \in \mathbb{R}^+$ próbek na sekundę, z wykorzystaniem metody Welch. Do szacowania widmowej gęstości mocy, wykorzystaj kolejne wycinki sygnału o długości K , uzyskane przez nakładanie dyskretnego okna czasowego $w \in \mathbb{R}^K$ na sygnał, gdzie $K \ll N$. Kolejne wycinki sygnału powinny nachodzić na siebie w $L \in \mathbb{N}$ próbkach.

Problem 8.14 : Zaimplementuj funkcję `chirp_lin`: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która obliczy wartość funkcji ściągowej z liniowo narastającą częstotliwością chwilową o następujących parametrach: chwilowa częstotliwość początkowa $f_0 \in \mathbb{R}$, chwilowa częstotliwość końcowa $f_1 \in \mathbb{R}$, czas $T \in \mathbb{R}$ wyznaczający czas przejścia od częstotliwości chwilowej f_0 do częstotliwości chwilowej f_1 , oraz $\varphi \in \mathbb{R}$ faza początkowa.

Problem 8.15 : Zaimplementuj funkcję `chirp_exp`: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która obliczy wartość funkcji ściągowej z wykładniczo narastającą częstotliwością chwilową o następujących parametrach: chwilowa częstotliwość początkowa $f_0 \in \mathbb{R}$, chwilowa częstotliwość końcowa $f_1 \in \mathbb{R}$, czas $T \in \mathbb{R}$ wyznaczający czas przejścia od częstotliwości chwilowej f_0 do częstotliwości chwilowej f_1 , oraz $\varphi \in \mathbb{R}$ faza początkowa.

Problem 8.16^{PM} : Zaimplementuj funkcję `stft`: $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}^{\lfloor \frac{N-L}{K-L} \rfloor \times \lfloor \frac{K}{2} \rfloor + 1}$, która wykona analizę sygnału $x \in \mathbb{R}^N$ z domeny czasu, z wykorzystaniem krótkoczasowej transformacji Fouriera oraz okna analizującego $w \in \mathbb{R}^K$, gdzie $K \ll N$. Kolejne analizowane wycinki (ramki, segmenty) sygnału, powinny na siebie nachodzić w $L \in \mathbb{N}$ próbkach, gdzie $0 \leq L < K$. Do obliczania dyskretniej transformacji Fouriera, wykorzystaj `rfft` bądź `rffft`.

Problem 8.17^P : Zaimplementuj funkcję $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która zwraca wartości sygnału, którego próbki pobrane od chwili $t_0 = 0.0$ do chwili $t_1 = 10.0$ z szybkością $f_p = 2000$, wygenerują przebieg sinusoidalny na spektrogramie X obliczonym z pobranych próbek. Widoczny przebieg sinusoidalny powinien mieć częstotliwość około 10 Hz, amplitudę 50 Hz. Spektrogram powinien być obliczony z wykorzystaniem okna Blackmana o długości $N = 512$ oraz nakładaniem się kolejnych segmentów o $L = 500$ próbek.

Problem 8.18^P : Zaimplementuj funkcję $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która zwraca wartości sygnału, którego próbki pobrane od chwili $t_0 = 0.0$ do chwili $t_1 = 10.0$ z szybkością $f_p = 2000$, wygenerują uśmiechnięta buźkę puszczającą oczko (tzn. ;) na spektrogramie X obliczonym z pobranych próbek. Spektrogram powinien być obliczony z wykorzystaniem okna Blackmana o długości $N = 512$ oraz nakładaniem się kolejnych segmentów o $L = 500$ próbek.

Problem 8.19^P : Znajdź optymalne okno syntezy $w_s \in \mathbb{R}^N$ dla danego okna analizy $w_a \in \mathbb{R}^N$ przy założeniu, że kolejne ramki w krótkoczasowej transformacji Fouriera nachodzą na siebie w $L \in \mathbb{N}_+$ próbkach.

Problem 8.20^{PM} : Zaimplementuj funkcję `istft`: $\mathbb{C}^{\lfloor \frac{N-L}{K-L} \rfloor \times \lfloor \frac{K}{2} \rfloor + 1} \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^N$, która wykona synteze sygnału $x \in \mathbb{R}^N$ z domeny czasu na podstawie sygnału $\mathbb{C}^{\lfloor \frac{N-L}{K-L} \rfloor \times \lfloor \frac{K}{2} \rfloor + 1}$ z domeny czasowo-częstotliwościowej, przy założeniu że oknem analizującym był sygnał $w \in \mathbb{R}^K$ oraz kolejne analizowane segmenty (ramki) sygnału nachodziły na siebie w $L \in \mathbb{N}$ próbkach, gdzie $0 \leq L < K$. Do obliczania odwrotnej dyskretniej transformacji Fouriera, wykorzystaj `irfft` bądź `irdft`.

Problem 8.21^{PM} : Zaimplementuj funkcję `phase_retrieval`: $\mathbb{R}^{M \times \lfloor \frac{W}{2} \rfloor + 1} \times \mathbb{R}^W \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}^{M \times \lfloor \frac{W}{2} \rfloor + 1}$, która odzyska fazę spektrogramu $\mathbb{R}^{M \times \lfloor \frac{W}{2} \rfloor + 1}$ z wykorzystaniem algorytmu Griffin-Lima i zwróci macierz $\mathbb{C}^{M \times \lfloor \frac{W}{2} \rfloor + 1}$, będącą oszacowaną krótko-czasową transformatą Fouriera (amplituda i faza). Załóż, że do obliczenia spektrogramu zostało wykorzystane okno czasowe $w \in \mathbb{R}^W$, oraz kolejne segmenty transformaty nakładały się na siebie na $L \in \mathbb{N}$ próbkach. Wykonaj N iteracji algorytmu. Zbadaj jak dobrze odzyskiwana jest faza dla sygnału o złożonym widmie. Na potrzeby realizacji tego zadania możesz pobrać i wykorzystać plik dźwiękowy `speech0001.wav`.

9. SYSTEMY DYSKRETNE

Problem 9.1^T : Wykaż czy system T jest (a) stabilny, (b) przyczynowy, (c) liniowy, (d) stacjonarny, (e) bez pamięci.

1. $T(x[n]) = x[n]g[n]$
2. $T(x[n]) = \sum_{k=n_0}^n x[k]$
3. $T(x[n]) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$
4. $T(x[n]) = x[n - n_0]$
5. $T(x[n]) = e^{x[n]}$
6. $T(x[n]) = ax[n] + b$
7. $T(x[n]) = x[-n]$
8. $T(x[n]) = x[n] + 3u[n + 1]$

Problem 9.2^T : Odpowiedź impulsowa $h[n]$ liniowego i stacjonarnego systemu jest niezerowa na przedziale $N_0 \leq n \leq N_1$. System h został pobudzony impulsowym sygnałem $x[n]$, który jest niezerowy na przedziale $N_2 \leq n \leq N_3$. W rezultacie, odpowiedź systemu $y[n]$ na to pobudzenie będzie niezerowa dla przedziału $N_4 \leq n \leq N_5$.

- a) Wyznacz wartość N_4 i N_5 w zależności od wartości N_0, N_1, N_2 i N_3 .
- b) Jeżeli $x[n]$ jest niezerowe tylko dla N kolejnych próbek, a $h[n]$ is niezerowe tylko dla M kolejnych próbek, to jaka jest maksymalna liczba niezerowych próbek na wyjściu systemu?

Problem 9.3^T : Oblicz odpowiedź skokową systemu o odpowiedzi impulsowej

$$h[n] = a^{-n}u[-n], \quad 0 < a < 1.$$

Obliczenia zrealizuj korzystając bezpośrednio z wzoru na dyskretny spłot.

Problem 9.4^T : Rozważ dyskretny system, który został pobudzony sygnałem $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. Odpowiedź tego systemu na pobudzenie $x[n]$ wynosi $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Ustal które z poniższych zdań jest prawdziwe:

- System musi być liniowy i stacjonarny.
- System może być liniowy i stacjonarny.
- System nie może być ani liniowy, ani stacjonarny.

Jeżeli system musi lub może być liniowy i stacjonarny, to znajdź jedną z możliwych odpowiedzi impulsowych tego systemu. Jeżeli system nie może być liniowy i stacjonarny, to uzasadnij dlaczego.

Problem 9.5^T : Rozważ stacjonarny i liniowy system, którego charakterystyka częstotliwościowa dana jest następującą zależnością

$$H(j\omega) = \exp\left(-j\frac{\omega}{2}\right), \quad |\omega| < \pi.$$

Zbadaj i udowodnij czy system jest przyczynowy / nieprzyczynowy.

Problem 9.6^T : Dany jest system, który jest liniowy, stacjonarny oraz przyczynowy. System ten został pobudzony sygnałem

$$x[n] = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{4}{3} 2^n u[-n-1].$$

Transformata Z odpowiedzi systemu na pobudzenie wynosi

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}.$$

1. Wyznacz transformatę Z sygnału wejściowego.
2. Jaki jest możliwy region zbieżności $Y(z)$?
3. Znajdź odpowiedź impulsową tego systemu.

Problem 9.7^T : Dany jest stacjonarny system liniowy, który został pobudzony sygnałem $x[n] = 5u[n]$ i w odpowiedzią sygnałem $y[n] = (2(\frac{1}{2})^n + 3(-\frac{3}{4})^n)u[n]$.

1. Wyznacz transmitancję $H(z)$ systemu oraz zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zera, biegunu oraz region zbieżności.
2. Wyznacz odpowiedź impulsową systemu.
3. Znajdź równanie różnicowe opisujące ten system.

Problem 9.8^T : Wyznacz transformatę Z ciągu $x[n]$.

1. $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$
2. $x[n] = -(\frac{1}{2})^n u[-n-1]$
3. $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[-n]$
4. $x[n] = \delta[n]$
5. $x[n] = \delta[n-1]$
6. $x[n] = \delta[n+1]$
7. $x[n] = (\frac{1}{2})^n (u[n] - u[n-10])$

Problem 9.9^T : Wyznacz transformatę Z ciągu

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ N, & n \geq N \end{cases}$$

Problem 9.10^T : Wyznacz transformaty Z poniższych ciągów, regiony zbieżności oraz naszkicuj zera i bieguny na płaszczyźnie zespolonej.

1. $x_1[n] = \alpha^{|n|}$, $0 < |\alpha| < 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$
2. $x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0 \wedge n > N-1 \end{cases}$
3. $x_3[n] = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 2N-1-n, & N \leq n \leq 2(N-1) \\ 0, & n < 0 \wedge n > 2(N-1) \end{cases}$

Problem 9.11^T : Oblicz odwrotną $\mathcal{Z}$ -transformację poniższych systemów. Załóż że każdy z tych systemów jest liniowy, niezmienny w czasie, oraz przyczynowy.

- a) $H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$
- b) $H(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$
- c) $H(z) = \frac{z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$
- d) $H(z) = -z^{-1} + 2z^{-2} - 3z^{-3} + 4z^{-4}$
- e) $H(z) = \frac{2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$
- f) $H(z) = \frac{6z^{-1}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{25}{144}z^{-2}}$
- g) $H(z) = \frac{2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{25}{144}z^{-2}}$
- h) $H(z) = \frac{2z^{-1}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{16}z^{-3}}$

Problem 9.12 : Ciąg *Fibonacci* to rekurencyjny ciąg którego dwa pierwsze elementy przyjmują odpowiednio wartość 0 i 1, a kolejne elementy są wyrażone jako suma dwóch poprzednich elementów.

- a) Zaprojektuj równanie różnicowe opisujące system, który będzie generował na wyjściu ciąg *Fibonacci*, to znaczy $y[0] = 0$, $y[1] = 1$, $y[2] = 1$, $y[3] = 2$ i tak dalej. Przyjmij że wymuszeniu na wejściu systemu wynosi $x[n] = 0$.
- b) Korzystając z $\mathcal{Z}$ -transformacji znajdź rozwiązanie tego równania różnicowego, tzn. nierekurencyjną zależność na $y[n]$.

Problem 9.13 : Dany jest system opisany następującym równaniem różnicowym:

$$12y[n] = 7y[n-1] - y[n-2] - 12x[n] + 5x[n-1].$$

Wiadomo że system ten składa się z dwóch niezależnych od siebie podsystemów o odpowiedziach impulsowych h_1 oraz h_2 . Strukturę tego systemu można przedstawić następującym równaniem:

$$y[n] = h_1[n] * x[n] + h_2[n] * x[n].$$

Wyznacz $h_2[n]$ przy założeniu że odpowiedź impulsowa h_1 jest znana i wynosi:

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

Problem 9.14^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{lti_amp} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$, która obliczy wzmocnienie liniowego systemu h , tzn. $A_h(f) \in \mathbb{R}$, dla sygnału harmonicznego o częstotliwości $f \in \mathbb{R}$. Załóż, że wartość f jest znormalizowana względem częstotliwości próbkowania. System h zdefiniowany jest poprzez współczynniki $b = [b_0, b_1, \dots, b_{M-1}]^T \in \mathbb{R}^M$ oraz $a = [a_0, a_1, \dots, a_{K-1}]^T \in \mathbb{R}^K$ równania różnicowego

$$\sum_{k=0}^{K-1} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M-1} b_m x[n-m].$$

Problem 9.15^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{lti_phase} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$, która obliczy przesunięcie fazowe liniowego systemu h , tzn. $\varphi_h(f) \in \mathbb{R}$, dla sygnału harmonicznego o częstotliwości $f \in \mathbb{R}$. Załóż, że wartość f jest znormalizowana względem częstotliwości próbkowania. System h zdefiniowany jest poprzez współczynniki $b = [b_0, b_1, \dots, b_{M-1}]^T \in \mathbb{R}^M$ oraz $a = [a_0, a_1, \dots, a_{K-1}]^T \in \mathbb{R}^K$ równania różnicowego

$$\sum_{k=0}^{K-1} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M-1} b_m x[n-m].$$

Problem 9.16^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{conv} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^{N+M-1}$, która oblicza wektor $(f * g) \in \mathbb{R}^{N+M-1}$ będący rezultatem liniowego spłotu między dwoma dyskretnymi sygnałami $f \in \mathbb{R}^N$ oraz $g \in \mathbb{R}^M$. Do obliczenia tego działania wykorzystaj algorytm naiwny (tzn. bezpośrednio ze wzoru).

Problem 9.17^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{fast_conv} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^{N+M-1}$, która oblicza wektor $(f * g) \in \mathbb{R}^{N+M-1}$ będący rezultatem liniowego spłotu między dwoma dyskretnymi sygnałami $f \in \mathbb{R}^N$ oraz $g \in \mathbb{R}^M$. Do obliczenia tego działania wykorzystaj algorytm szybkiego spłotu z wykorzystaniem spłotu kołowego.

Problem 9.18^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{overlap_add} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{N+M-1}$, która oblicza wektor $(f * g) \in \mathbb{R}^{N+M-1}$ będący rezultatem liniowego spłotu między dwoma dyskretnymi sygnałami $f \in \mathbb{R}^N$ oraz $g \in \mathbb{R}^M$, przy założeniu że $N \gg M$. Do obliczenia tego działania wykorzystaj algorytm sekcjonowanego szybkiego spłotu *Overlap-add* przetwarzający segmenty sygnału f o długości $L \in \mathbb{N}^+$.

Problem 9.19^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{overlap_save} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{N+M-1}$, która oblicza wektor $(f * g) \in \mathbb{R}^{N+M-1}$ będący rezultatem liniowego spłotu między dwoma dyskretnymi sygnałami $f \in \mathbb{R}^N$ oraz $g \in \mathbb{R}^M$, przy założeniu że $N \gg M$. Do obliczenia tego działania wykorzystaj algorytm sekcjonowanego szybkiego spłotu *Overlap-save* przetwarzający segmenty sygnału f o długości $L \in \mathbb{N}^+$.

Problem 9.20^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{lfi_filter} : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, która obliczy odpowiedź przyczynowego systemu liniowego h , zdefiniowanego przez równanie różnicowe

$$\sum_{k=0}^K a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m],$$

na impulsowe podbudzenie sygnałem o wartościach $g \in \mathbb{R}^N$. System h zdefiniowany jest poprzez współczynniki $b = [b_0, b_1, \dots, b_{M-1}]^T \in \mathbb{R}^M$ oraz $a = [a_0, a_1, \dots, a_{K-1}]^T \in \mathbb{R}^K$. Załóż, że $y[n] = 0$ dla $n < 0$ oraz $g = [x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]]^T$.

Problem 9.21^{PM} : Zaimplementuj funkcję $\text{filtfilt} : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, która obliczy odpowiedź systemu liniowego g na podbudzenie $x \in \mathbb{R}^N$ z zerową zmianą fazy sygnału podbudzającego, to znaczy, że faza sygnału wejściowego i wyjściowego jest dokładnie taka sama. System g należy zaprojektować na podstawie bazowego przyczynowego systemu liniowego h o współczynnikach $b = [b_0, b_1, \dots, b_{M-1}]^T \in \mathbb{R}^M$ oraz $a = [a_0, a_1, \dots, a_{K-1}]^T \in \mathbb{R}^K$. Zaprojektuj system g tak, aby relacja między systemem h i g była następująca

$$A_h^2(f) = A_g(f)$$

10. PROJEKTOWANIE FILTRÓW NIEREKURSYWNYCH

Problem 10.1^{PM} : Zaimplementuj funkcję `firwin_lp_I`: $\{2L : L \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2L+1}$, która zwróci odpowiedź impulsową $h \in \mathbb{R}^{2L+1}$ nierekursywnego filtra dolnoprzepustowego rzędu $M = 2L$ o unormowanej częstotliwości odcięcia $f_0 \in \mathbb{R}$, oraz liniowej charakterystyce fazowej. Do zaprojektowania filtra wykorzystaj metodę okien czasowych oraz okno prostokątne.

Problem 10.2^{PM} : Zaimplementuj funkcję `firwin_hp_I`: $\{2L : L \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2L+1}$, która zwróci odpowiedź impulsową $h \in \mathbb{R}^{2L+1}$ nierekursywnego filtra górnoprzepustowego o unormowanej częstotliwości odcięcia $f_0 \in \mathbb{R}$, oraz liniowej charakterystyce fazowej. Do zaprojektowania filtra wykorzystaj metodę okien czasowych oraz okno prostokątne.

Problem 10.3^{PM} : Zaimplementuj funkcję `firwin_bp_I`: $\{2L : L \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2L+1}$, która zwróci odpowiedź impulsową $h \in \mathbb{R}^{2L+1}$ nierekursywnego filtra pasmowoprzepustowego rzędu $M = 2L$ o unormowanych częstotliwościach odcięcia $f_0, f_1 \in \mathbb{R}$, gdzie $f_0 < f_1$, oraz liniowej charakterystyce fazowej. Do zaprojektowania filtra wykorzystaj metodę okien czasowych oraz okno prostokątne.

Problem 10.4^{PM} : Zaimplementuj funkcję `firwin_bs_I`: $\{2L : L \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2L+1}$, która zwróci odpowiedź impulsową $h \in \mathbb{R}^{2L+1}$ nierekursywnego filtra pasmowozaporowego rzędu $M = 2L$ o unormowanych częstotliwościach odcięcia $f_0, f_1 \in \mathbb{R}$, gdzie $f_0 < f_1$, oraz liniowej charakterystyce fazowej. Do zaprojektowania filtra wykorzystaj metodę okien czasowych oraz okno prostokątne.

Problem 10.5^{PM} : Zaimplementuj funkcję `firwin_lp_II`: $\{2L - 1 : L \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2L}$, która zwróci odpowiedź impulsową $h \in \mathbb{R}^{2L}$ nierekursywnego filtra dolnoprzepustowego rzędu $M = 2L - 1$ o unormowanej częstotliwości odcięcia $f_0 \in \mathbb{R}$, oraz liniowej charakterystyce fazowej. Do zaprojektowania filtra wykorzystaj metodę okien czasowych oraz okno prostokątne.

Problem 10.6^{PM} : Zaimplementuj funkcję `firwin_bp_II`: $\{2L - 1 : L \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2L}$, która zwróci odpowiedź impulsową $h \in \mathbb{R}^{2L}$ nierekursywnego filtra pasmowoprzepustowego rzędu $M = 2L - 1$ o unormowanych częstotliwościach odcięcia $f_0, f_1 \in \mathbb{R}$, gdzie $f_0 < f_1$, oraz liniowej charakterystyce fazowej. Do zaprojektowania filtra wykorzystaj metodę okien czasowych oraz okno prostokątne.

Problem 10.7^{PM} : Zaimplementuj funkcję `firwin_diff`: $\{2L + 1 : L \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{R}^{2L+1}$, która zwróci odpowiedź impulsową $h \in \mathbb{R}^{2L+1}$ nierekursywnego filtra różnicującego rzędu $2L$ oraz liniowej charakterystyce liniowej. Do zaprojektowania filtra wykorzystaj metodę okien czasowych oraz okno prostokątne.

Problem 10.8^{PM} : Zaimplementuj funkcję `fir_lp_kaiser_I`: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, która zwróci odpowiedź impulsową $h \in \mathbb{R}^N$ nierekursywnego filtra dolnoprzepustowego typu I, którego znormalizowana częstotliwość graniczna wynosi $f_0 \in [0, 0.5]$ [Hz], szerokość pasma przejściowego wynosi Δf [Hz], a wzmocnienie w paśmie zaporowym wynosi δ . Do zaprojektowania filtra wykorzystaj metodę okien i okno Kaisera.

Problem 10.9^{PM} : Zaimplementuj funkcję `fir_I_LS`: $\{2L : L \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{2L+1}$, która zwróci odpowiedź impulsową $h \in \mathbb{R}^{2L+1}$ nierekursywnego filtra typu I o rzędzie $M = 2L$. Charakterystyka amplitudowa filtra $|H(e^{j\Omega})|$, który należy zaprojektować jest zdefiniowana poprzez dwa wektory $f \in \mathbb{R}^K$ oraz $a \in \mathbb{R}^K$, gdzie $a_i = |H(e^{j2\pi f_i})|$. Do zaprojektowania filtra wykorzystaj metodę ważonej optymalizacji średniokwadratowej z wagami $w \in \mathbb{R}_+^K$. Wartość wagi w_i , odzwierciedla na ile dany parametr charakterystyki (f_i oraz a_i) jest istotny w porównaniu do pozostałych parametrów.

Problem 10.10^{PM} : Zaimplementuj funkcję `fir_I_remez`: $\mathbb{N} \times \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}^{2M+1}$, która zwróci odpowiedź impulsową $h \in \mathbb{R}^{2M+1}$ nierekursywnego filtra typu I o rzędzie $M = 2L$. Charakterystyka amplitudowa filtra $|H(e^{j\Omega})|$, który należy zaprojektować jest zdefiniowana poprzez funkcje $A \in \mathbb{F}$, gdzie $\mathbb{F} = \{f : [0, 0.5] \rightarrow \mathbb{R}_+\}$. Do zaprojektowania filtra wykorzystaj metodę aproksymacji Czebyszewa i algorytm Remez. Funkcja $W \in \mathbb{F}$ określa wagę (isotność) danego punktu charakterystyki amplitudowej w procesie aproksymacji.

11 DODATKI

11.A Transformaty Z wybranych sekwencji

Sekwencja $x[n]$	Transformata $X(z)$	Region zbieżności
$\delta[n]$	1	$z \in \mathbb{C}$
$\delta[n - k]$	z^{-k}	$z \in \mathbb{C}$ $z \neq 0 (k > 0)$ $z \neq \infty (k < 0)$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
$\cos[\omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin[\omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$r^n \cos[\omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}$	$ z > r$
$r^n \sin[\omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}$	$ z > r$
$\begin{cases} a^n, 0 \leq n \leq N \\ 0, \text{ pozostałe} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$